局所可解性とStokesの現象 (偏微分方程式の解の構造の研究)

清水, 信敬

数理解析研究所講究録
376巻 1980年 151-162

局所可解性とStokesの現象

京大 数理研 清水信敬

偏微分作用素 P の局所可解性を調べる問題について P が simple characteristics を持つ場合は ほぼ解決されている。しかし P が multiple characteristics を持つ場合 問題は きわめて複雑な様相を呈する。ひとつの例として 原点で double characteristics を持つ次の作用素を考えよう

$$P(t, D_x, D_t) = (D_t - iat^k D_x)(D_t - ibt^k D_x) + ct^{k-1} D_x ,$$

$$k\ ;\ \text{正整数}, \quad a, b, c : \text{定数}, \quad b < 0 < a,$$

$$(t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad D_t = i^{-1}\partial/\partial t, \quad D_x = i^{-1}\partial/\partial x \ 。$$

P の原点での局所可解性は k が偶数の場合と奇数の場合について それぞれ別々の方法によって調べられている；

(イ) k が奇数のとき (Gilioli – Tréves [4])

P が原点で局所可解 $\Leftrightarrow$ $c/(a-b) \neq 0, 1 \mod (k+1)$

(ロ) k が偶数のとき (Menikoff [5])

P が原点で局所可解 $\Leftrightarrow$ $c/(a-b) \neq 1/2 \mod (k+1)$

ここではこの問題を少し別の角度から統一的に扱うことを考えたい。 P は Grušin [3] によって研究された作用素の class に属している。Grušin の結果は

$$P:\ \text{hypoelliptic} \iff \operatorname{Ker} P(t, \pm 1, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$$

hypoelliptic な作用素の formal transpose は局所可解だから $\operatorname{Ker} P(t, \pm 1, D_t)$ を調べることにより局所可解性のひとつの十分条件が得られる。実際 上記の(イ)(ロ)の研究においても最も困難な点は $P(t, \pm 1, D_t)$ に相応する常微分方程式がいつ急減少する解を持つかを決定することにあった。この研究では問題を 0 と ∞ とに特異点を持つ常微分方程式系の解の漸近挙動に帰着させる。そして この問題が常微分方程式の理論の中で Stokes の現象として知られているものと強い関連を持っていることが示されるであろう。

1. 常微分方程式系の非正則特異点

まず最初に $P(t, 1, D_t) f_0(t) = 0$ を考える。system で書くと

$$\frac{d}{dt} f = \begin{bmatrix} -(a+b)t^k, & -abt^{2k} - kbt^{k-1} + ct^{k-1} \\ 1, & 0 \end{bmatrix} f, \quad f = \begin{pmatrix} f_0' \\ f_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ここで独立変数と従属変数とに次の変換を施す；

$$f = \begin{bmatrix} \varphi_b' & \varphi_a' \\ \varphi_b & \varphi_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_b^{-1} & 0 \\ 0 & \varphi_a^{-1} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} -bt^k, & -at^k \\ 1, & 1 \end{bmatrix} v \qquad (2)$$

$$\zeta = \frac{t^{k+1}}{k+1} \quad \text{ただし} \quad \varphi_b = \exp\frac{-bt^{k+1}}{k+1}, \quad \varphi_a = \exp\frac{-at^{k+1}}{k+1}$$

vに対する常微分方程式は次の形となる；

$$\frac{d}{d\zeta} v = \left(\begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{k+1}, & \frac{\alpha+k}{k+1} \\ \frac{-\alpha}{k+1}, & \frac{-\alpha-k}{k+1} \end{bmatrix} \right) v, \quad \alpha = \frac{c}{a-b}, \quad (3)$$

命題1. $\mathrm{Ker}\, P(t, 1, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) \neq \{0\}$ であるための必要十分条件は (3) が $\zeta \to \infty$ $\arg \zeta = 0, (k+1)\pi$ のときに急減少する nontrivial な解を持つことである。

注意. (3)式の右辺第2項の係数行列の固有値は 0 と $-k/(k+1)$ で、これは(3)の解を原点で級数展開したときの指数である。従って (3)の解はたしかに 原点の周囲を $(k+1)$回 まわれば もとの値にもどる。

$\zeta = \infty$ は 常微分方程式系(3)の 非正則特異点である。常微分方程式の一般論を (3)に適用すると

命題2. 半直線 $\{\mathrm{Re}\,(a-b)\zeta = 0\}$ を含まないような ∞ の近傍の各角領域 S において (3)の基本系

$\phi_{1S}(\zeta)$, $\phi_{2S}(\zeta)$ が存在して次の漸近展開を持つ。([1] 参照)

$$\begin{aligned} \phi_{1S}(\zeta) &\sim e^{-b\zeta}\cdot\zeta^{\frac{\alpha}{k+1}}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\zeta}(\;)+\cdots\right) \qquad \text{as } \zeta\to\infty \\ \phi_{2S}(\zeta) &\sim e^{-a\zeta}\cdot\zeta^{\frac{-\alpha-k}{k+1}}\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{\zeta}(\;)+\cdots\right) \qquad \text{in } S \end{aligned} \tag{4}$$

角領域 S として特に $\arg\zeta=0$ の部分を含む S_+ と $\arg\zeta=(k+1)\pi$ の部分を含む S_- をとり 上の命題に言う基本系 ϕ_{1S_+}, ϕ_{2S_+} と ϕ_{1S_-}, ϕ_{2S_-} とを考えよう。

<u>命題3.</u> ϕ_{1S_+}, ϕ_{2S_+} を S_+ から S_- まで解析接続して

$$(\phi_{1S_+}, \phi_{2S_+}) = (\phi_{1S_-}, \phi_{2S_-})F, \qquad F: (2\times2)\text{定数行列}$$

と書けたとしよう。このとき 命題1. の条件がなりたつための 必要十分条件は

$$F_{12}=0 \;(k:\text{奇}) \quad \text{または} \quad F_{22}=0 \;(k:\text{偶})$$

注意. ひとつの角領域から他の角領域へ移ると 漸近展開(4)は もはや一般には成立しない。この事実は Stokes の現象として 知られている。

2. Stokes の現象

ここでは K. Okubo [2] の結果を 2階の場合に応用する。次の system を考えよう。

$$\frac{d}{d\zeta}X = \left(\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) X, \quad L_2 < 0 < L_1 \tag{5}$$

σ_1, σ_2 ; $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ の固有値， $f_j = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}$: 対応する固有ベクトル

(B1) $L_1, L_2 \neq 0$ (B2) $\arg L_1 \neq \arg L_2$

(A1) $\sigma_1 - \sigma_2 \notin \mathbb{Z}$ (A2) $\sigma_j - A_{kk} \notin \mathbb{Z}$ $j, k = 1, 2$

補助方程式として 次の微分方程式を考える；

$$\left(uI - \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \right) \frac{dV_j}{du} = \left(\sigma_j I - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) V_j, \tag{6$_j$}$$

V_{1j}, V_{2j} を $(6)_j$ の解で 次の形のものとせよ

$$\begin{aligned} V_{1j}(u) &= (u - L_1)^{\sigma_j - A_{11}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (u - L_1)(\ ) + \cdots \right\} \\ V_{2j}(u) &= (u - L_2)^{\sigma_j - A_{22}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (u - L_2)(\ ) + \cdots \right\} \end{aligned} \tag{7}$$

ただし 偏角については $\arg L_j - \pi < \arg(u - L_j) \leq \arg L_j + \pi$ (8)

そこで $C_{kj} = C_{kj}(\arg L_1, \arg L_2)$ を次の形に定義する

$$\Gamma(A_{11} - \sigma_j)\, C_{1j}\, g_{1j} + \Gamma(A_{22} - \sigma_j)\, C_{2j}\, g_{2j} = f_j \tag{9}$$

ただし $g_{kj} = (2\pi i)^{-1} \left(e^{-2\pi i(\sigma_j - A_{kk})} - 1 \right) V_{kj}(0)$

この定義は gamma 因子を除いて [2] の定義と等価である。gamma 因子は [2] lemma 5 の $\Gamma(1-\beta_p)$ に対応する。

ここで　$S(L_j)=\{\zeta : |\zeta|>K,\ |\arg L_j\zeta|\leq \frac{3}{2}\pi-\varepsilon\}$

$S(\arg L_1, \arg L_2) = S(L_1)\cap S(L_2)$　とせよ。

定理（[2]）　常微分方程式系(5)の $\zeta=0$ の近傍での基本行列（基本系を並べたもの）と　その $\zeta=\infty$ の近くでの漸近展開とは次の形で関係づけられる。（[2]末尾参照）

$$\left\{\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}+\zeta\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}+\cdots\right\}\begin{bmatrix}\zeta^{\sigma_1} & 0\\ 0 & \zeta^{\sigma_2}\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{\zeta}\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}+\cdots\right\}\begin{bmatrix}e^{L_1\zeta}\zeta^{A_{11}}, & 0\\ 0, & e^{L_2\zeta}\zeta^{A_{22}}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\, C(\arg L_1, \arg L_2)$$

$$\text{as}\ \zeta\longrightarrow\infty\quad\text{in}\quad S(\arg L_1, \arg L_2)\qquad ,(10)$$

更に　$C_{kj}(\theta_1+2q_1\pi,\ \theta_2+2q_2\pi)=C_{kj}(\theta_1,\theta_2)\times e^{2q_k\pi i(A_{kk}-\sigma_j)}$,(11)

もとの system (3)と(5)を比較してみよう。(3)の場合

$\sigma_1=0$, $\sigma_2=-k/(k+1)$,　$f_1=\begin{pmatrix}\alpha+k\\ -\alpha\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$,　(12)

従って　(B1)(B2)(A1)は　既に満たされている。(A2)は,

(A2) ;　$\alpha\ (=c/(a-b))\ \not\equiv\ 0,\ 1\ \mathrm{mod}\,(k+1)$　(13)

更に(10)式の左辺を $\mathfrak{X}$ とすると　命題3の記号では

$(\phi_{1S_+},\phi_{2S_+})=\mathfrak{X}\cdot C^{-1}(0,-\pi)$, $(\phi_{1S_-},\phi_{2S_-})=\mathfrak{X}\cdot C^{-1}(-k\pi,$ $-(k+1)\pi)$　(k:偶) , $(\phi_{1S_-},\phi_{2S_-})=\mathfrak{X}\cdot C^{-1}(-(k+1)\pi,-k\pi)$　(k:奇)

命題4. system (3) は (A2) ((13)式) を満たすとせよ。
このとき

$$F = \begin{cases} C(-(k+1)\pi, -k\pi)\cdot C^{-1}(0,-\pi) & (k:\text{奇}) \\ C(-k\pi, -(k+1)\pi)\cdot C^{-1}(0,-\pi) & (k:\text{偶}) \end{cases}$$

3. $C_{kj} = C_{kj}(0,-\pi)$ の計算

まず $\tilde{f}_j = \begin{pmatrix} \beta_j \\ -\alpha_j \end{pmatrix}$ と書くことにすれば r_j, l_j があって

$$\begin{bmatrix} A_{11}-\sigma_j, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22}-\sigma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_j\,{}^t\tilde{f}_j \\ l_j\,{}^t\tilde{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_j\beta_j, & -r_j\alpha_j \\ l_j\beta_j, & -l_j\alpha_j \end{bmatrix} \tag{14}$$

一方 (9)式に上の記号を代入し C_{kj} について解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma(r_j\beta_j)\,C_{1j} \\ \Gamma(-l_j\alpha_j)\,C_{2j} \end{pmatrix} &= \left[\left(\frac{e^{2\pi i r_j\beta_j}-1}{2\pi i}\right)V_{1j}(0), \left(\frac{e^{-2\pi i l_j\alpha_j}-1}{2\pi i}\right)V_{2j}(0)\right]^{-1} f_j \\ &= K_j^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi i}\left(e^{-2\pi i l_j\alpha_j}-1\right)\left(-{}^t\tilde{f}_j\cdot V_{2j}(0)\right) \\ \frac{1}{2\pi i}\left(e^{2\pi i r_j\beta_j}-1\right)\left({}^t\tilde{f}_j\cdot V_{1j}(0)\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

ここで $K_j \neq 0$ で、最右辺の成分はベクトルの内積を表わす。ところで $(6)_j$ から ${}^t\tilde{f}_j\cdot V_{kj}(u)$ は次の方程式の解である；

$$\frac{d}{du}\left({}^t\tilde{f}_j\cdot V_j\right) = \left(\frac{-r_j\beta_j}{u-L_1} + \frac{l_j\alpha_j}{u-L_2}\right)\left({}^t\tilde{f}_j\cdot V_j\right) \tag{16}$$

更に ${}^t\tilde{f}_j\cdot V_{kj}(u)$ を決定する初期条件は (7) から与えられる。
かくして $C_{kj} = C_{kj}(0,-\pi)$ は次の如くに計算される；
まず、

$$
\begin{aligned}
{}^t\tilde{f}_j \cdot V_{1j}(u) &= \beta_j\,(L_1-L_2)^{-l_j\alpha_j}(u-L_1)^{-r_j\beta_j}(u-L_2)^{l_j\alpha_j} \\
{}^t\tilde{f}_j \cdot V_{2j}(u) &= -\alpha_j\,(L_2-L_1)^{r_j\beta_j}(u-L_1)^{-r_j\beta_j}(u-L_2)^{l_j\alpha_j}
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

(A2) より　$r_j\beta_j,\ -l_j\alpha_j \notin \mathbb{Z}$ 。従って (14) (15) (17) により $C_{kj}(0,-\pi)$ は K_j の因子を除いて完全に決定される。

注意 1.　$r_j\beta_j,\ -l_j\alpha_j \notin \mathbb{Z}$ からとくに、$C_{kj} \neq 0$　$k, j = 1, 2$　(18)

注意 2.　(8) 式での偏角の選択により $C(0,-\pi)$ については

$$\arg(L_1-L_2) = 0,\quad \arg(L_2-L_1) = \pi$$

4.　応用と結論

(11), (14), (15), (17) の各式を用いて (A2) の仮定のもとで F が計算される。

(イ) k；奇 のとき

$$
\begin{aligned}
&\left(C(-(k+1), -k\pi)\, C^{-1}(0,-\pi)\right)_{12} = \\
&\quad = C_{11}C_{12}(C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21})^{-1}\left(-e^{-(k+1)r_1\beta_1\pi i} + e^{-(k+1)r_2\beta_2\pi i}\right) \\
&\quad = C_{11}C_{12}(C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21})^{-1} e^{-(k+1)r_2\beta_2\pi i}\left(1-e^{-(k+1)(r_1\beta_1-r_2\beta_2)\pi i}\right)
\end{aligned}
$$

(12) 式 を用いて

$$r_1\beta_1 - r_2\beta_2 = \sigma_2 - \sigma_1 = -k/(k+1)$$

k が奇数であることと、前の注意 1 ((18) 式) により (A2) のもとでは　$\left(C(-(k+1)\pi, -k\pi)\, C^{-1}(0,-\pi)\right)_{12} \neq 0$

(ロ) k：偶 のとき

$$\left(C(-k\pi, -(k+1)\pi)\, C^{-1}(0,-\pi) \right)_{22} =$$

$$= (C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21})^{-1} (-e^{k l_1 \alpha_1 \pi i} C_{21} C_{12} + e^{k l_2 \alpha_2 \pi i} C_{11} C_{22})$$

(14), (15), (17) の各式により

$$\frac{C_{11}C_{22}}{C_{21}C_{12}} = \frac{(e^{-2\pi i l_1 \alpha_1} - 1)(-\alpha_1)(L_2 - L_1)^{r_1\beta_1} (e^{2\pi i r_2 \beta_2} - 1)(\beta_2)(L_1 - L_2)^{-l_2\alpha_2}}{(e^{2\pi i r_1 \beta_1} - 1)(\beta_1)(L_1 - L_2)^{-l_1\alpha_1} (e^{-2\pi i l_2 \alpha_2} - 1)(-\alpha_2)(L_2 - L_1)^{r_2\beta_2}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(-l_1\alpha_1)\,\Gamma(r_2\beta_2)}{\Gamma(r_1\beta_1)\,\Gamma(-l_2\alpha_2)}$$

ここで 前の注意2 と恒等式 $r_1\beta_1 + l_1\alpha_1 - r_2\beta_2 - l_2\alpha_2 = 0$,

trace の不変性 ; $r_1\beta_1 - l_2\alpha_2 = 0$, $-l_1\alpha_1 + r_2\beta_2 = 0$

更に, $\{\Gamma(Z)\,\Gamma(-Z)\}^{-1} = -\pi^{-1} Z \sin \pi Z$ とを用いて

$$\left(C(-k\pi, -(k+1)\pi)\, C^{-1}(0,-\pi) \right)_{22} =$$

$$= \frac{C_{21}C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}\, e^{k l_1 \alpha_1 \pi i} \left\{ \left(\frac{\sin r_2\beta_2\pi}{\sin r_1\beta_1\pi} \right) e^{(k+1)(\sigma_2 - \sigma_1)\pi i} - 1 \right\}$$

System (3) については (12)式より

$$\left(\frac{\sin r_2\beta_2\pi}{\sin r_1\beta_1\pi} \right) e^{(k+1)(\sigma_2-\sigma_1)\pi i} - 1 = \left(\frac{\sin \frac{\alpha+k}{k+1}\pi}{\sin \frac{\alpha}{k+1}\pi} \right) - 1$$

よって (A2) のもとでは

$$(\quad)_{22} = 0 \iff \alpha (= c/(a-b)) \equiv 1/2 \mod (k+1)$$

以上によって (A2) のもとで $\mathrm{Ker}\, P(t, 1, D_t)$ が

調べられた。 $\mathrm{Ker}\,P(t,-1,D_t)$ についても全く同じ結論が導びかれる。 $\alpha = c/(a-b)$ は formal transpose をとっても不変だから。

<u>結論 I.</u> (A2) ; $c/(a-b) \not\equiv 0, 1 \mod (k+1)$ のとき

(イ) k : 奇 ならば P は原点で局所可解

(ロ) k : 偶 のとき $c/(a-b) \not\equiv 1/2 \mod (k+1)$ ならば P は原点で局所可解。

上記の(ロ)で $c/(a-b) \equiv 1/2 \mod (k+1)$ のときは (1) の急減少解が存在する。それを $f_{00}(t)$ としよう。 System (3) の解の原点の近傍での級数展開を (2)式を使って (1) の解にもどしてみると 指数 0 に対応するものは 原点で nonzero, 指数 $-k/(k+1)$ に対応するものは 原点で zero となる。((1) の解 $\begin{pmatrix} f_0' \\ f_0 \end{pmatrix}$ の f_0 について考えている。) 急減少解を (10)式 によって 原点の近傍での級数解で表示してみると 注意 1 により $C_{kj} \neq 0$ だから 指数 0 の成分は 0 ではない。よって $f_{00}(0) \neq 0$。 よって [5] の lemma により

<u>結論 II.</u> (ロ)′ k : 偶 で $c/(a-b) \equiv 1/2 \mod (k+1)$ ならば P は 原点で局所可解でない。

5. 3階方程式

$$P = (D_t - iat^k D_x)(D_t - ibt^k D_x)(D_t - ict^k D_x) + dt^{k-1} D_x (D_t - iet^k D_x) + ift^{k-2} D_x$$

a, b, c, d, e, f ; 定数, $\mathrm{Re}\,a$, $\mathrm{Re}\,b$, $\mathrm{Re}\,c \neq 0$

a, b, c : distinct

これは Grušin [3] で扱われた作用素の class の中の2次元 3階のものにあたる。従って問題は再び $\mathrm{Ker}\,P(t, \pm 1, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ にある。

$P(t, 1, D_t) f_0(t) = 0$ を考えよう。

$$\begin{bmatrix} f_0'' \\ f_0' \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_c'' & \varphi_b'' & \varphi_a'' \\ \varphi_c' & \varphi_b' & \varphi_a' \\ \varphi_c & \varphi_b & \varphi_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_c^{-1} & & 0 \\ & \varphi_b^{-1} & \\ 0 & & \varphi_a^{-1} \end{bmatrix} v, \quad \zeta = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

とすれば常微分方程式系は

$$\frac{d}{d\zeta} v = \left(\begin{bmatrix} -c & & 0 \\ & -b & \\ 0 & & -a \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta} A_1 + \frac{1}{\zeta^2} A_2 \right) v, \quad A_j : \text{定数行列}$$

解の漸近展開は $e^{-c\zeta}[\ldots]$, $e^{-b\zeta}[\ldots]$, $e^{-a\zeta}[\ldots]$ の形だから最もやさしい場合を考えると

<u>結論III.</u> k : 偶 a, b, c : distinct で $\mathrm{Re}\,a$, $\mathrm{Re}\,b$, $\mathrm{Re}\,c$ が同符号であれば $\mathrm{Ker}\,P(t, \pm 1, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ となり ${}^tP$ は原点で局所可解となる。

6. 文献

[1] E. Coddington – N. Levinson ; Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill 1955.

[2] K. Okubo : A global representation of a fundamental set of solutions and a Stokes phenomenon for a system of linear ordinary differential equations, J. Math. Soc. Japan Vol 15 No. 3 (1963) 268–288.

[3] V. V. Grušin : On a class of hypoelliptic operators Math. USSR Sbornik Vol. 12 No. 3 (1970) 458–476.

[4] A. Gilioli – F. Tréves : An example in the solvability theory of linear PDE's, Amer. Jour. Math. Vol. 96 No. 2 (1974) 366–384.

[5] A. Menikoff : Some examples of hypoelliptic partial differential equations, Math. Ann. 221 (1976), 167–181.

[6] 清水信敬 ; 局所可解性とStokesの現象 修士論文, 京大 数理研 (1979)。